

Sixth Term Examination Papers 9470

MATHEMATICS 2

Morning

Thứ 4 ngày 5 tháng 6 năm 2024

Thời gian làm bài: 180 phút

THÔNG TIN CHO THÍ SINH

Có 12 câu hỏi trong đề thi này. Mỗi câu hỏi được chấm tối đa 20 điểm.

1. Bạn có thể trả lời bao nhiêu câu hỏi tùy thích. Bạn được khuyến nên tập trung vào không quá sáu câu hỏi. Điểm ít sẽ được cho đối với các câu trả lời rời rạc.
2. Phần bài làm gạch chéo sẽ KHÔNG được chấm. Điểm cuối cùng của bạn sẽ dựa trên sáu câu hỏi mà bạn đạt điểm cao nhất.
3. KHÔNG có Sổ Công thức Toán học.
4. Máy tính KHÔNG được phép. Từ điển song ngữ KHÔNG được phép.

Chờ được cho phép bắt đầu trước khi lật trang này.

1 Phần A: Toán thuần túy

1. Trong đẳng thức

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11,$$

tổng của năm số nguyên liên tiếp từ 4 trở lên bằng tổng của ba số nguyên liên tiếp tiếp theo.

Suốt bài toán này, các biến n , k và c đại diện cho các số nguyên dương.

- (a) Chứng minh rằng tổng của $n + k$ số nguyên liên tiếp từ c trở lên bằng tổng của n số nguyên liên tiếp tiếp theo nếu và chỉ nếu

$$2n^2 + k = 2ck + k^2.$$

- (b) Tìm tập hợp các giá trị có thể của n , và các giá trị tương ứng của c , trong mỗi trường hợp

i. $k = 1$

ii. $k = 2$.

- (c) Chứng minh rằng không có nghiệm cho c và n nếu $k = 4$.

- (d) Bây giờ xem xét trường hợp $c = 1$.

i. Tìm hai giá trị có thể của k và các giá trị tương ứng của n .

ii. Chứng minh, cho một giá trị có thể N của n , và giá trị tương ứng K của k , rằng

$$N' = 3N + 2K + 1$$

cũng sẽ là một giá trị có thể của n , với

$$K' = 4N + 3K + 1$$

là giá trị tương ứng của k .

iii. Tìm hai giá trị có thể khác của k và các giá trị tương ứng của n .

2. Trong bài toán này, bạn không cần xem xét các vấn đề về hội tụ.

(a) Tìm khai triển chuỗi nhị thức của $(8 + x^3)^{-1}$, hợp lệ cho $|x| < 2$.

Do đó chứng minh rằng, đối với mỗi số nguyên $m \geq 0$,

$$\int_0^1 \frac{x^m}{8 + x^3} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \cdot \frac{1}{3k + m + 1} \right).$$

(b) Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \left(\frac{1}{3k + 3} - \frac{2}{3k + 2} + \frac{4}{3k + 1} \right) = \int_0^1 \frac{1}{x + 2} dx,$$

và tính giá trị của tích phân.

(c) Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \left(\frac{72(2k + 1)}{(3k + 1)(3k + 2)} \right) = \pi\sqrt{a} - \ln b,$$

trong đó a và b là các số nguyên mà bạn nên xác định.

3. Đường tròn đơn vị là đường tròn có bán kính 1 và tâm là gốc tọa độ, O .

N và P là các điểm phân biệt trên đường tròn đơn vị. N có tọa độ $(-1, 0)$, và P có tọa độ $(\cos \theta, \sin \theta)$, trong đó $-\pi < \theta < \pi$. Đường thẳng NP cắt trục y tại Q , có tọa độ $(0, q)$.

(a) Chứng minh rằng $q = \tan \frac{1}{2}\theta$.

(b) Trong phần này, $q \neq 1$.

i. Gọi $f_1(q) = \frac{1+q}{1-q}$. Chứng minh rằng $f_1(q) = \tan \frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\pi)$.

ii. Gọi Q_1 là điểm có tọa độ $(0, f_1(q))$ và P_1 là điểm cắt (khác N) của đường thẳng NQ_1 và đường tròn đơn vị. Mô tả hình học mối quan hệ giữa P và P_1 .

(c) i. P_2 là ảnh của P dưới phép quay ngược chiều kim đồng hồ quanh O qua góc $\frac{1}{3}\pi$. Đường thẳng NP_2 cắt trục y tại điểm Q_2 có tọa độ $(0, f_2(q))$. Tìm $f_2(q)$ theo q , cho $q \neq \sqrt{3}$.

ii. Trong phần này, $q \neq -1$. Gọi $f_3(q) = \frac{1-q}{1+q}$, gọi Q_3 là điểm có tọa độ $(0, f_3(q))$ và gọi P_3 là điểm cắt (khác N) của đường thẳng NQ_3 và đường tròn đơn vị. Mô tả hình học mối quan hệ giữa P và P_3 .

iii. Trong phần này, $0 < q < 1$. Gọi $f_4(q) = f_2^{-1}(f_3(f_2(q)))$, gọi Q_4 là điểm có tọa độ $(0, f_4(q))$ và gọi P_4 là điểm cắt (khác N) của đường thẳng NQ_4 và đường tròn đơn vị. Mô tả hình học mối quan hệ giữa P và P_4 .

4. Trong bài toán này, nếu O, C và D là các điểm không thẳng hàng trong không gian ba chiều, chúng ta sẽ gọi vectơ khác không $\vec{v}$ là vectơ phân giác cho góc $\angle COD$ nếu $\vec{v}$ nằm trong mặt phẳng COD , góc giữa $\vec{v}$ và $\vec{OC}$ bằng góc giữa $\vec{v}$ và $\vec{OD}$, và cả hai góc đều nhỏ hơn 90° .
- (a) Gọi O, X và Y là các điểm không thẳng hàng trong không gian ba chiều, và định nghĩa $\vec{x} = \vec{OX}$ và $\vec{y} = \vec{OY}$.
Gọi $\vec{b} = |\vec{x}|\vec{y} + |\vec{y}|\vec{x}$.
- Chứng minh rằng $\vec{b}$ là vectơ phân giác cho góc $\angle XOY$.
Giải thích, sử dụng sơ đồ, tại sao bất kỳ vectơ phân giác nào khác cho góc $\angle XOY$ là bội số dương của $\vec{b}$.
 - Tìm giá trị của λ sao cho điểm B , định nghĩa bởi $\vec{OB} = \lambda\vec{b}$, nằm trên đường thẳng XY . Tìm cũng tỷ lệ mà điểm B chia XY .
 - Chứng minh, trong trường hợp OB vuông góc với XY , rằng tam giác XOY là tam giác cân.
- (b) Gọi O, P, Q và R là các điểm trong không gian ba chiều, không ba điểm nào thẳng hàng. Một vectơ phân giác được chọn cho mỗi góc POQ, QOR và ROP . Chứng minh rằng ba góc giữa chúng hoặc tất cả nhọn, tất cả tù hoặc tất cả vuông.

5. (a) Các hàm f_1 và F_1 , mỗi hàm có miền $\mathbb{Z}$, được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned}f_1(n) &= n^2 + 6n + 11, \\F_1(n) &= n^2 + 2.\end{aligned}$$

Chứng minh rằng F_1 có cùng phạm vi với f_1 .

- (b) Hàm g_1 , với miền $\mathbb{Z}$, được định nghĩa bởi

$$g_1(n) = n^2 - 2n + 5.$$

Chứng minh rằng phạm vi của f_1 và g_1 có giao rỗng.

- (c) Các hàm f_2 và g_2 , mỗi hàm với miền $\mathbb{Z}$, được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned}f_2(n) &= n^2 - 2n - 6, \\g_2(n) &= n^2 - 4n + 2.\end{aligned}$$

Tìm bất kỳ số nguyên nào nằm trong giao của phạm vi của hai hàm.

- (d) Chứng minh rằng $p^2 + pq + q^2 \geq 0$ cho tất cả thực p và q .

Các hàm f_3 và g_3 , mỗi hàm với miền $\mathbb{Z}$, được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned}f_3(n) &= n^3 - 3n^2 + 7n, \\g_3(n) &= n^3 + 4n - 6.\end{aligned}$$

Tìm bất kỳ số nguyên nào nằm trong giao của miền giá trị của hai hàm.

6. Trong bài toán này, bạn không cần xem xét các vấn đề về hội tụ.

(a) Chuỗi T_n , cho $n = 0, 1, 2, \dots$, được định nghĩa bởi $T_0 = 1$ và, cho $n \geq 1$, bởi

$$T_n = \frac{2n-1}{2n} T_{n-1}.$$

Chúng minh bằng quy nạp rằng

$$T_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$

cho $n = 0, 1, 2, \dots$.

Ghi chú rằng $\binom{0}{0} = 1$.

(b) Chúng minh rằng trong khai triển chuỗi nhị thức cho $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$,

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r,$$

các hệ số liên tiếp liên quan bởi

$$a_r = \frac{2r-1}{2r} a_{r-1}$$

cho $r = 1, 2, \dots$.

Do đó chúng minh rằng $a_r = T_r$ cho tất cả $r = 0, 1, 2, \dots$.

(c) Gọi b_r là hệ số của x^r trong khai triển chuỗi nhị thức cho $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$, sao cho

$$(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r.$$

Bằng cách xem xét $\frac{b_r}{a_r}$, tìm biểu thức liên quan đến hệ số nhị thức cho b_r , cho $r = 0, 1, 2, \dots$.

(d) Bằng cách xem xét tích của khai triển chuỗi nhị thức cho $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ và $(1-x)^{-1}$, chúng minh rằng

$$\frac{(2n+1)}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^n \frac{1}{2^{2r}} \binom{2r}{r},$$

cho $n = 1, 2, \dots$.

7. (a) Phác thảo đường cong C_1 với phương trình

$$(y^2 + (x - 1)^2 - 1)(y^2 + (x + 1)^2 - 1) = 0.$$

- (b) Xem xét đường cong C_2 với phương trình

$$(y^2 + (x - 1)^2 - 1)(y^2 + (x + 1)^2 - 1) = \frac{1}{16}.$$

- i. Chứng minh rằng đường thẳng $y = k$ gặp đường cong C_2 tại các điểm mà

$$x^4 + 2(k^2 - 2)x^2 + (k^4 - \frac{1}{16}) = 0.$$

Do đó xác định số giao điểm giữa đường cong C_2 và đường thẳng $y = k$ cho mỗi giá trị dương của k .

- ii. Xác định xem các điểm trên đường cong C_2 với tọa độ y lớn nhất có xa hơn, hay gần hơn, trục y so với những điểm trên đường cong C_1 .
- iii. Chứng minh rằng không thể cho cả $y^2 + (x - 1)^2 - 1$ và $y^2 + (x + 1)^2 - 1$ đều âm, và suy ra rằng đường cong C_2 nằm hoàn toàn bên ngoài đường cong C_1 .
- iv. Phác thảo các đường cong C_1 và C_2 trên cùng trục.

8. Trong bài toán này, định lý sau có thể được sử dụng mà không cần chứng minh.

Gọi $u_1, u_2, \dots$ là chuỗi các số thực. Nếu chuỗi

- bị chặn trên, nên $u_n \leq b$ cho tất cả n , trong đó b là một số cố định
- và tăng, nên $u_n < u_{n+1}$ cho tất cả n
thì tồn tại một số $L \leq b$ sao cho $u_n \rightarrow L$ khi $n \rightarrow \infty$.

Đối với các số thực dương x và y , định nghĩa $a(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$ và $g(x, y) = \sqrt{xy}$.

Gọi x_0 và y_0 là hai số thực dương với $y_0 < x_0$ và định nghĩa, cho $n \geq 0$

$$x_{n+1} = a(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n).$$

(a) Bằng cách xem xét $(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2$, chứng minh rằng $y_{n+1} < x_{n+1}$, cho $n \geq 0$.
Chứng minh thêm rằng, cho $n \geq 0$

i. $x_{n+1} < x_n$

ii. $y_n < y_{n+1}$.

Suy ra rằng tồn tại giá trị M sao cho $y_n \rightarrow M$ khi $n \rightarrow \infty$.

Chứng minh rằng $0 < x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{1}{2}(x_n - y_n)$ và do đó $x_n - y_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Giải thích tại sao x_n cũng hội tụ về M khi $n \rightarrow \infty$.

(b) Gọi

$$I(p, q) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(p^2 + x^2)(q^2 + x^2)}} dx,$$

trong đó p và q là các số thực dương với $q < p$.

Chứng minh, sử dụng phép thay $t = \frac{1}{2} \left(x - \frac{pq}{x} \right)$ trong tích phân

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}(p+q)^2 + t^2\right)(pq + t^2)}} dt,$$

rằng

$$I(p, q) = I(a(p, q), g(p, q)).$$

Do đó tính $I(x_0, y_0)$ theo M .

2 Phần B: Cơ học

9. Một hào dài thẳng, với tiết diện ngang hình chữ nhật, đã được đào trên mặt đất ngang khác. Chiều rộng của hào là d và chiều sâu $2d$. Một hạt được bắn với tốc độ v , trong đó $v^2 = \lambda dg$, tại góc α với phương ngang, từ một điểm trên mặt đất cách cạnh gần hơn của hào một khoảng d . Mặt phẳng thẳng đứng mà nó chuyển động vuông góc với hào.

- (a) Hạt rơi xuống đáy hào mà không chạm vào một bên nào trước.
- Bằng cách xem xét độ dịch chuyển thẳng đứng của hạt khi độ dịch chuyển ngang là d , chứng minh rằng $(\tan \alpha - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1$ và suy ra rằng $\lambda > 1$.
 - Chứng minh cũng rằng $(2 \tan \alpha - \lambda)^2 > \lambda^2 + 4(\lambda - 1)$ và suy ra rằng $\alpha > 45^\circ$.
- (b) Chứng minh rằng, miễn là $\lambda > 1$, α luôn có thể được chọn sao cho hạt rơi xuống đáy hào mà không chạm vào một bên nào trước.

10. Một lăng trụ tam giác nằm trên mặt phẳng ngang. Một trong các mặt chữ nhật của lăng trụ là thẳng đứng; mặt thứ hai là ngang và tiếp xúc với mặt phẳng; mặt chữ nhật nghiêng thứ ba tạo góc α với phương ngang. Hai mặt tam giác của lăng trụ là các tam giác vuông và thẳng đứng. Lăng trụ có khối lượng M và nó có thể di chuyển mà không ma sát qua mặt phẳng.

Một hạt có khối lượng m nằm trên bề mặt nghiêng của lăng trụ. Tiếp xúc giữa hạt và mặt phẳng là thô, với hệ số ma sát μ .

- (a) Chứng minh rằng nếu $\mu < \tan \alpha$, thì hệ thống không thể ở trạng thái cân bằng. Gọi $\mu = \tan \lambda$, với $0 < \lambda < \alpha < \frac{1}{4}\pi$.

Một lực P được tác dụng lên mặt chữ nhật thẳng đứng của lăng trụ, vuông góc với mặt đó và hướng vào bên trong lăng trụ. Hạt và lăng trụ tăng tốc, nhưng hạt vẫn ở vị trí tương đối giống nhau so với lăng trụ.

- (b) Chứng minh rằng độ lớn, F , của lực ma sát giữa hạt và lăng trụ là

$$F = \frac{m}{M+m} |(M+m)g \sin \alpha - P \cos \alpha|.$$

Tìm biểu thức tương tự cho độ lớn, N , của phản lực pháp tuyến giữa hạt và lăng trụ.

- (c) Do đó chứng minh rằng lực P phải thỏa mãn

$$(M+m)g \tan(\alpha - \lambda) \leq P \leq (M+m)g \tan(\alpha + \lambda).$$

3 Phần C: Xác suất và Thống kê

11. (a) Phác thảo đồ thị của $y = x^{\frac{1}{x}}$ cho $x > 0$, cho thấy vị trí của bất kỳ điểm ngoặt nào.

Tìm giá trị lớn nhất của $n^{\frac{1}{n}}$, trong đó n là số nguyên dương.

N người sẽ được xét nghiệm máu để có sự hiện diện hoặc vắng mặt của một enzyme. Mỗi người, độc lập với những người khác, có xác suất p có enzyme hiện diện trong mẫu máu của họ, trong đó $0 < p < 1$. Xét nghiệm máu luôn xác định đúng liệu enzyme có hiện diện hay vắng mặt trong mẫu.

Phương pháp sau được sử dụng.

- Những người được xét nghiệm được chia thành r nhóm có kích thước k , với $k > 1$ và $rk = N$.
- Trong mọi nhóm, một mẫu từ mỗi người trong nhóm đó được trộn vào một mẫu lớn, sau đó được xét nghiệm.
- Nếu enzyme không hiện diện trong mẫu kết hợp từ một nhóm, không cần xét nghiệm thêm người trong nhóm đó.
- Nếu enzyme hiện diện trong mẫu kết hợp từ một nhóm, một mẫu thứ hai từ mỗi người trong nhóm được xét nghiệm riêng lẻ.

- (b) Tìm, theo N , k và p , số lượng xét nghiệm mong đợi.

- (c) Cho rằng N là bội số của 3, tìm giá trị lớn nhất của p mà có thể tìm một giá trị nguyên của k sao cho $k > 1$ và số lượng xét nghiệm mong đợi là nhiều nhất N . Chứng minh rằng giá trị này của p lớn hơn $\frac{1}{4}$.

- (d) Chứng minh rằng, nếu pk đủ nhỏ, số lượng xét nghiệm mong đợi xấp xỉ $N(\frac{1}{k} + pk)$.
Trong trường hợp $p = 0.01$, chứng minh rằng chọn $k = 10$ cho số lượng xét nghiệm mong đợi chỉ khoảng 20% của N .

12. Trong bài toán này, bạn có thể sử dụng mà không cần chứng minh các kết quả

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Suốt bài toán, n và k là các số nguyên với $n \geq 3$ và $k \geq 2$.

- (a) Trong một trò chơi, k người chơi, bao gồm Ada, mỗi người được cho một số nguyên ngẫu nhiên từ 1 đến n (nghĩa là, đối với mỗi người chơi, mỗi số này đều có khả năng bằng nhau và được gán độc lập với tất cả những người khác). Một người chơi thắng trò chơi nếu họ được cho một số nhỏ hơn tất cả những người chơi khác, nên có thể không có người thắng trong trò chơi này.

Tìm biểu thức, theo n , k và a , cho xác suất rằng Ada được cho số a , trong đó $1 \leq a \leq n-1$, và tất cả những người chơi khác được cho số lớn hơn. Do đó chứng minh rằng, nếu $k = 4$, xác suất có người thắng trong trò chơi này là

$$\frac{(n-1)^2}{n^2}.$$

- (b) Trong trò chơi thứ hai, k người chơi, bao gồm Ada và Bob, mỗi người được cho một số nguyên ngẫu nhiên từ 1 đến n . Một người chơi thắng trò chơi nếu họ được cho một số nhỏ hơn tất cả những người chơi khác hoặc nếu họ được cho một số lớn hơn tất cả những người chơi khác, nên có thể có zero, một hoặc hai người thắng trong trò chơi này.

Tìm biểu thức, theo n , k và d , cho xác suất rằng Ada được cho số a và Bob được cho số $a+d+1$, trong đó $1 \leq d \leq n-2$ và $1 \leq a \leq n-d-1$, và tất cả những người chơi khác được cho số lớn hơn a và nhỏ hơn $a+d+1$. Do đó chứng minh rằng, nếu $k = 4$, xác suất có hai người thắng trong trò chơi này là

$$\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}.$$

Nếu $k = 4$, giá trị nhỏ nhất của n là bao nhiêu để có khả năng có đúng hai người thắng lớn hơn có đúng một người thắng trong trò chơi này?

Sixth Term Examination Papers

MATHEMATICS 3

Morning

Thứ 24 ngày 6 tháng 6 năm 2024

Thời gian làm bài: 180 phút

THÔNG TIN CHO THÍ SINH

Có 12 câu hỏi trong đề thi này. Mỗi câu hỏi được chấm tối đa 20 điểm.

1. Bạn có thể trả lời bao nhiêu câu hỏi tùy thích. Bạn được khuyến nên tập trung vào không quá sáu câu hỏi. Điểm ít sẽ được cho đối với các câu trả lời rời rạc.
2. Phần bài làm gạch chéo sẽ KHÔNG được chấm. Điểm cuối cùng của bạn sẽ dựa trên sáu câu hỏi mà bạn đạt điểm cao nhất.
3. KHÔNG có Sổ Công thức Toán học.
4. Máy tính KHÔNG được phép. Từ điển song ngữ KHÔNG được phép.

Chờ được cho phép bắt đầu trước khi lật trang này.

Phần A: Toán thuần túy

1. Trong suốt câu hỏi này, N là một số nguyên với $N \geq 1$ và

$$S_N = \sum_{r=1}^N \frac{1}{r^2}.$$

Bạn có thể giả sử rằng $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ tồn tại và bằng $\frac{\pi^2}{6}$.

- (a) Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2(r+1)}.$$

Suy ra rằng

$$\sum_{r=1}^N \frac{1}{r^2(r+1)} = \sum_{r=1}^N \frac{1}{r^2} - 1 + \frac{1}{N+1}.$$

Chứng minh thêm rằng

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

- (b) Tìm

$$\sum_{r=1}^N \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)}$$

theo S_N , và suy ra giá trị

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)}.$$

- (c) Chứng minh rằng

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2(r+1)} - 1.$$

2. (a) Giải các bất phương trình:

i. $\sqrt{4x^2 - 8x + 64} \geq |x + 8|$,

ii. $\sqrt{4x^2 - 8x + 64} \geq |3x - 8|$.

(b) i. Cho $f(x) = \sqrt{4x^2 - 8x + 64} - 2(x - 1)$. Chứng minh, bằng cách xét

$$(\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x - 1))f(x)$$

hoặc cách khác, rằng $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \infty$.

ii. Vẽ đồ thị $y = \sqrt{4x^2 - 8x + 64}$ và $y = 2(x - 1)$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

(c) Tìm m và c sao cho tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{4x^2 - 5x + 4} \geq |mx + c|$$

là $x : x \leq 3$.

(d) Tìm p, q, m và c sao cho tập nghiệm của bất phương trình

$$|x^2 + px + q| \geq mx + c$$

là $x : -5 \leq x \leq 1 \cup x : 5 \leq x \leq 7$.

3. Trong suốt câu hỏi này, chỉ xét $x > 0$.

(a) Cho

$$g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{x+c}{x(x+1)},$$

trong đó $c \geq 0$.

- i. Chứng minh rằng đồ thị $y = g(x)$ có hệ số góc dương với mọi $x > 0$ khi $c \geq \frac{1}{2}$.
 - ii. Tìm các giá trị của x để $y = g(x)$ có hệ số góc âm khi $0 \leq c < \frac{1}{2}$.
- (b) Biết rằng với mọi $c > 0$, ta có $g(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow 0$. Vẽ phác thảo, với $x > 0$, đồ thị $y = g(x)$ trong các trường hợp:
- i. $c = \frac{3}{4}$,
 - ii. $c = \frac{1}{4}$.

(c) Hàm số f được xác định bởi

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+c}.$$

Chứng minh rằng, với $x > 0$:

- i. f là hàm giảm khi $c \geq \frac{1}{2}$;
- ii. f có một điểm cực trị khi $0 < c < \frac{1}{2}$;
- iii. f là hàm tăng khi $c = 0$.

4. (a) Chứng minh rằng nếu góc nhọn giữa hai đường thẳng có hệ số góc m_1 và m_2 là 45° thì

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm 1.$$

Đường cong C có phương trình $4ay = x^2$, trong đó $a \neq 0$.

- (b) Nếu $p \neq q$, chứng minh rằng các tiếp tuyến của C tại các điểm có hoành độ p và q cắt nhau tại một điểm có hoành độ $\frac{1}{2}(p + q)$. Tìm tung độ của điểm này theo p và q .

Chứng minh thêm rằng mọi cặp tiếp tuyến của C tạo với nhau góc 45° đều cắt nhau trên đường cong

$$(y + 3a)^2 = 8a^2 + x^2.$$

- (c) Chứng minh rằng góc nhọn giữa mọi cặp tiếp tuyến của C cắt nhau trên đường cong

$$(y + 7a)^2 = 48a^2 + 3x^2$$

là không đổi. Tìm giá trị của góc nhọn đó.

5. Trong câu hỏi này, M và N là các ma trận 2×2 không suy biến.

Vết của ma trận $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ được định nghĩa là $\text{tr}(M) = a + d$.

(a) Chứng minh rằng với mọi ma trận M và N , ta có $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$, và suy ra biểu thức của $\text{tr}(M + N)$ theo $\text{tr}(M)$ và $\text{tr}(N)$.

(b) Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\det M} \frac{d}{dt}(\det M) = \text{tr} \left(M^{-1} \frac{dM}{dt} \right).$$

(c) Giả sử M thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dM}{dt} = MN - NM,$$

trong đó các phần tử của N là các hàm của t . Chứng minh rằng $\det M$, $\text{tr}(M)$ và $\text{tr}(M^2)$ đều không phụ thuộc vào t .

Với

$$N = \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

và biết rằng

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

khi $t = 0$, hãy tìm M theo t .

(d) Giả sử thay vào đó M thỏa mãn

$$\frac{dM}{dt} = MN,$$

và $\text{tr}(M)$ khác 0 và không phụ thuộc vào t . Có nhất thiết suy ra rằng $\text{tr}(N) = 0$ hay không?

6. (a) Một hạt chuyển động trong mặt phẳng với

$$\frac{dx}{dt} = -x + 3y + u, \quad \frac{dy}{dt} = x + y + u,$$

trong đó u là một hàm theo thời gian. Tại $t = 0$, hạt ở vị trí (x_0, y_0) .

- i. Bằng cách xét $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$, chứng minh rằng nếu hạt ở gốc tọa độ tại một thời điểm $t > 0$ thì $x_0 = y_0$.
- ii. Biết rằng $x_0 = y_0$, hãy tìm một giá trị không đổi của u để hạt ở gốc tọa độ tại thời điểm $t = T > 0$.

(b) Một hạt chuyển động trong không gian với

$$\frac{dx}{dt} = 4y - 5z + u, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2z + u, \quad \frac{dz}{dt} = x - 2y + u.$$

Tại $t = 0$, hạt ở vị trí (x_0, y_0, z_0) .

- i. Chứng minh rằng nếu hạt ở gốc tọa độ tại một thời điểm $t > 0$ thì y_0 là trung bình cộng của x_0 và z_0 .
- ii. Chứng minh thêm rằng điều kiện cần là $x_0 = y_0 = z_0$.
- iii. Biết rằng $x_0 = y_0 = z_0$, hãy tìm một giá trị không đổi của u để hạt ở gốc tọa độ tại thời điểm $t = T > 0$.

7. Trong câu hỏi này, bạn không cần xét đến vấn đề hội tụ.

Với số nguyên dương n , đặt

$$f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

và

$$g(n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \cdots.$$

- (a) Chứng minh rằng $0 < f(n) < \frac{1}{n}$.
- (b) Chứng minh rằng $0 < g(n) < \frac{1}{n+1}$.
- (c) Chứng minh rằng $(2n)!e - f(2n)$ và $\frac{(2n)!}{e} + g(2n)$ đều là các số nguyên.
- (d) Chứng minh rằng nếu $qe = \frac{p}{e}$ với p, q là các số nguyên dương thì $qf(2n) + pg(2n)$ là số nguyên với mọi n .
- (e) Suy ra rằng e^2 là một số vô tỉ.

8. (a) Giải thích vì sao phương trình $(y - x + 3)(y + x - 5) = 0$ biểu diễn một cặp đường thẳng có hệ số góc lần lượt là 1 và -1 . Chứng minh rằng phương trình

$$y^2 - x^2 + py + qx + r = 0$$

biểu diễn một cặp đường thẳng có hệ số góc 1 và -1 khi và chỉ khi $p^2 - q^2 = 4r$.

Cho C_1 là đường cong $x = y^2 + 2sy + s(s + 1)$ và C_2 là đường cong $y = x^2$.

- (b) Giải thích vì sao mọi điểm thuộc cả C_1 và C_2 đều thỏa mãn

$$y^2 + 2sy + s(s + 1) - x + k(y - x^2) = 0$$

với mọi số thực k .

Giả sử C_1 và C_2 cắt nhau tại bốn điểm phân biệt. Chứng minh rằng khi chọn $k = 1$ thì phương trình trên biểu diễn một cặp đường thẳng có hệ số góc 1 và -1 , và cả bốn điểm giao đều nằm trên hai đường thẳng này.

- (c) Chứng minh rằng điều kiện để có bốn điểm giao phân biệt là $s < -\frac{3}{4}$.
(d) Chứng minh rằng nếu $s < -\frac{3}{4}$ thì C_1 và C_2 cắt nhau tại bốn điểm phân biệt.

Phần B: Cơ học

9. Góc tọa độ nằm trên một mặt bàn ngang nhẵn. Một quả cầu nhẵn A có khối lượng m và bán kính r đứng yên trên bàn sao cho điểm thấp nhất của nó ở gốc tọa độ.

Một quả cầu nhẵn thứ hai B , cùng khối lượng và bán kính, có điểm thấp nhất ở độ cao $2r \sin \alpha$ so với mặt bàn và có hoành độ dương lớn. Quả cầu B được phóng song song với trục x với vận tốc u và va chạm với A . Hệ số đàn hồi của va chạm là $\frac{1}{3}$.

- (a) Chứng minh rằng sau va chạm, vận tốc của B là

$$\left(-\frac{u}{3}(1 + 2 \sin^2 \alpha), \frac{2u}{3} \sin \alpha \cos \alpha \right).$$

- (b) Chứng minh rằng điểm thấp nhất của B cắt trục y tại điểm $(0, Y)$, trong đó

$$Y = 2r(\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha), \quad \tan \beta = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \sin^2 \alpha}.$$

Một quả cầu thứ ba C có bán kính r đứng yên với điểm thấp nhất tại $(0, h)$.

- (c) Chứng minh rằng nếu $h > Y + 2r \sec \beta$ thì B không va chạm với C .
(d) Chứng minh rằng $Y < 2r \sec \beta$, và suy ra rằng B không va chạm với C với mọi α nếu $h > \frac{8r}{\sqrt{3}}$.

10. Hai hình lập phương có khối lượng riêng đồng nhất ρ được đặt chồng lên nhau trên một mặt phẳng ngang nhám. Hình lập phương dưới có cạnh 1, hình lập phương trên có cạnh $a < 1$. Hệ số ma sát tại mọi tiếp xúc là $\mu < 1$.

Một lực ngang P được tác dụng lên hình lập phương trên tại độ cao $h < a$ so với đáy của nó.

- (a) Chứng minh rằng nếu hệ cân bằng thì phản lực pháp tuyến của mặt phẳng tác dụng lên hình lập phương dưới có điểm đặt cách trung điểm đáy của nó một khoảng

$$\frac{P(1+h)}{(1+a^3)\rho g},$$

và tìm biểu thức tương tự cho phản lực giữa hai hình lập phương.

- (b) Chứng minh rằng nếu không có hình nào bị lật thì cân bằng sẽ bị phá vỡ do hình lập phương trên trượt trên hình lập phương dưới.
- (c) Chứng minh rằng nếu $a = 1$ thì cân bằng bị phá vỡ do trượt khi $\mu(1+h) < 1$, và do lật khi $\mu(1+h) > 1$.
- (d) Chứng minh rằng nếu $a < 1$, $h(1+a^3(1-a)) > a^4$, và không xảy ra trượt, thì cân bằng bị phá vỡ do hình lập phương trên bị lật.
- (e) Chứng minh, bằng cách xét $a = \frac{1}{2}$, rằng tình huống trong phần trên có thể xảy ra.

Phần C: Xác suất và Thống kê

11. Bạn có thể sử dụng không cần chứng minh các kết quả

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n, \quad \sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = n2^{n-1}.$$

- (a) Chứng minh rằng

$$r \binom{2n}{r} = (2n+1-r) \binom{2n}{2n+1-r},$$

và suy ra rằng

$$\sum_{r=0}^{2n} r \binom{2n}{r} = 2 \sum_{r=n+1}^{2n} r \binom{2n}{r}.$$

- (b) Một đồng xu cân bằng được tung $2n$ lần. Gọi X là số lớn hơn trong hai số: số lần xuất hiện mặt ngửa và số lần xuất hiện mặt sấp. Nếu có đúng n mặt ngửa và n mặt sấp thì $X = n$.

Chứng minh rằng

$$E(X) = n \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right).$$

- (c) Chứng minh rằng $\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ giảm khi n tăng.

- (d) Trong một trò chơi, bạn chọn n và trả $\pounds n$, sau đó tung một đồng xu cân bằng $2n$ lần. Bạn thắng số tiền (tính bằng bảng Anh) bằng với X . Nếu có n mặt ngửa và n mặt sấp thì bạn thắng $\pounds n$. Nên chọn n như thế nào để tối đa hóa kỳ vọng tiền thắng trên mỗi bảng Anh đã trả?

12. (a) Một điểm được chọn ngẫu nhiên đều trong hình vuông $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Gọi R là khoảng cách từ điểm đó đến gốc tọa độ. Chứng minh rằng với $1 \leq r \leq \sqrt{2}$,

$$P(R \leq r) = \sqrt{r^2 - 1} + \frac{1}{4}\pi r^2 - r^2 \cos^{-1}(r^{-1}).$$

Hỏi $P(R \leq r)$ bằng bao nhiêu khi $0 \leq r \leq 1$?

- (b) Chứng minh rằng

$$E(R) = \frac{2}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 1}}, dr.$$

- (c) Chứng minh rằng

$$E(R) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right).$$